

Funciones.-

Una función $f: A \rightarrow B$, es un subconjunto de $A \times B$, en el cual cada elemento $x \in A$ tiene a lo mas una imagen $y \in B$.

Como todo subconjunto de $A \times B$ es una relación, los términos de “dominio de definición” y “dominio de imágenes” aparecen tanto en el estudio de las funciones como en el de las relaciones.

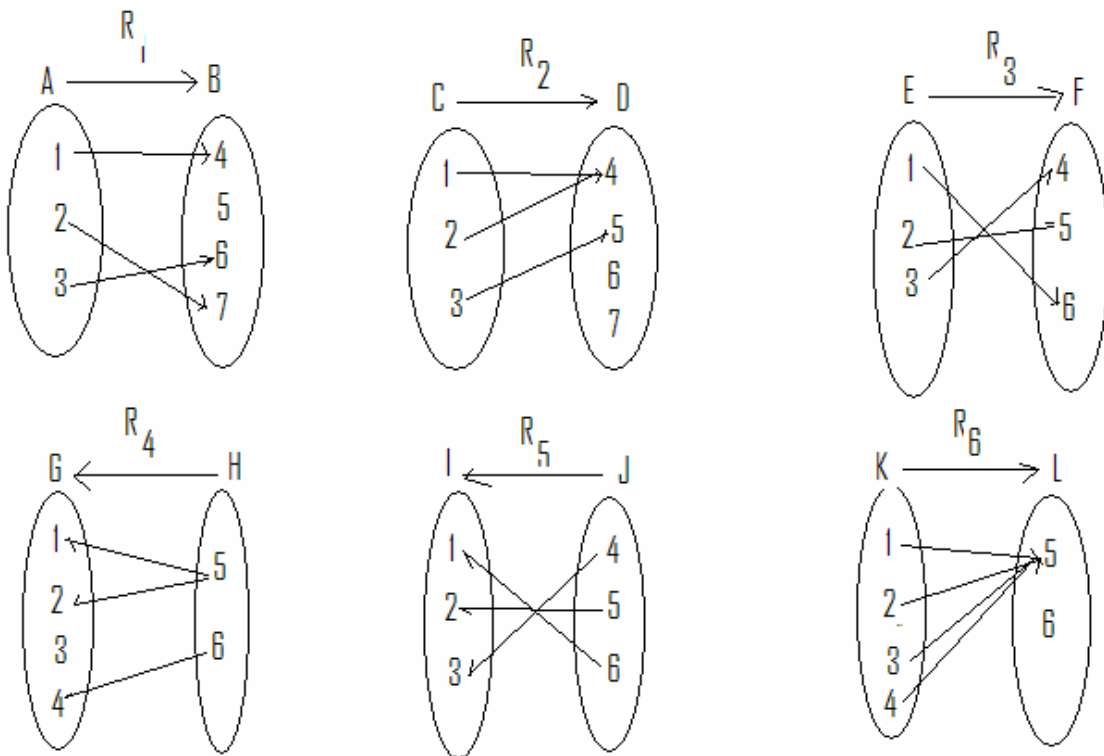
Problema importante en matemática es determinar si una relación definida en $R \times R$, mediante una ecuación de la forma $f(x,y) = 0$ es no una relación funcional.

La relación $f = \{xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z, \forall x \in A\}$, donde $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

La relación así definida expresa una función de A en B , lo que se expresa $f: A \rightarrow B$.

Donde A : conjunto de las PRE-ímagenes y B : conjunto de las imágenes o valores de la función.

1.- Analizar cuales de los gráficos corresponden a relaciones funcionales, determinando Dom y Rec.



Determine además:

1.1.-la imagen de 2 según R_1

1.2.- $R_5(4)$

1.3.-la preimágen de 5 según R_3

2.- considere $E = \{ x/x \in \mathbb{N} : 2 < x < 5 \}$

$$F = \{ x/x \in \mathbb{N} : 2K+2 ; K=0,1,2,3 \}$$

Se definen. $R_1 = \{(3,2), (4,4), (5,8)\}$

$$R_2 = \{(3,4), (4,2), (5,8)\}$$

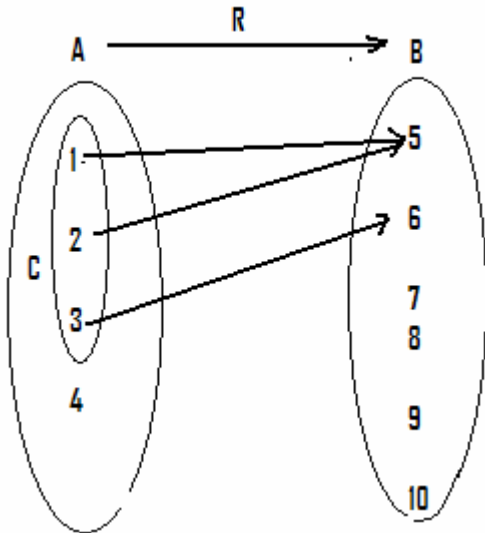
$$R_3 = \{(x, y) / (x, y) \in E \times F, y = 2\}$$

- 2.1.-escriba cada relación por extensión
- 2.2.- haga un grafico sagital.
- 2.3.- establezca funcionalidad para cada una de las relaciones.
- 2.4.-determine Dom y Rec. Para cada una de ellas.

Funciones con dominio restringido: consideremos la relación R definida en

$A \times B,$

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{5,6,7,8,9,10\}$ y $R = \{(1,5), (2,5), (3,6)\}$.cuyo grafico sagital se muestra:



LA RELACION “R” REPRESENTA UNA RELACION CUALQUIERA.

Pero si ahora consideramos que $C \subseteq A$; $C = \{1,2,3\}$ y definimos $R' : C \rightarrow B$, tal que:

$R' = \{(1,5), (2,5), (3,6)\}$ la relación R' redefinida en estos términos, permite transformar una relación definida en principio de $A \rightarrow B$, en una función que actúa en una parte de A, que es C, sobre B.

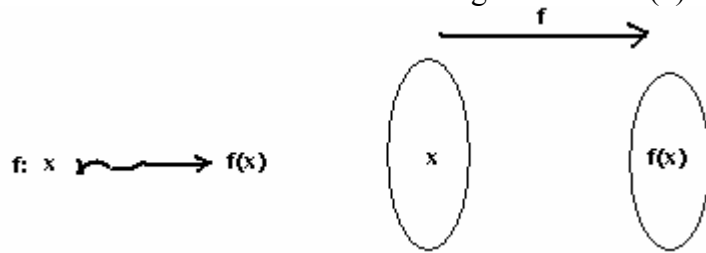
El dominio así definido se llama: **DOMINIO DE DEFINICION O DOMINIO RESTRINGIDO.**

TIPOS DE FUNCIONES: De acuerdo a las características del comportamiento de las imágenes o de los valores de la función, estas pueden ser:

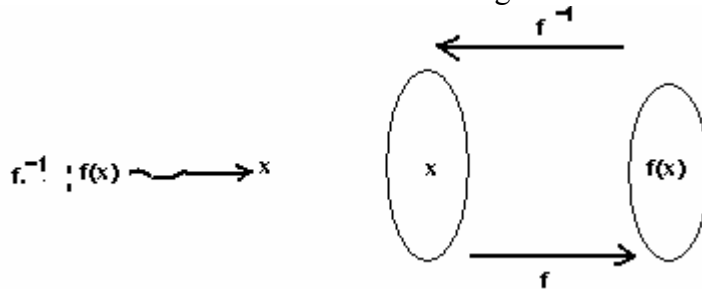
FUNCION INYECTIVA O UNO A UNO: $\forall x, y \in Domf / f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(Para dos valores distintas de la preimágenes, le corresponden también valores distintos de la función)

FUNCION DIRECTA : asocia la imagen al valor $f(x)$

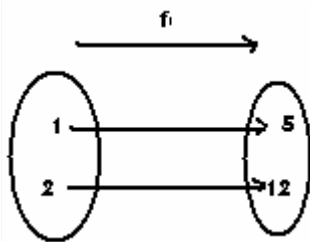


FUNCION INVERSA : Devuelve la imagen.



Ejemplo :

Si $f(x) = x^2 + 4x$, $f(1) = 5$ $f(2) = 12$



Como $y = x^2 + 4x$, entonces : $x^2 + 4x + 4 = y + 4$, o sea : $(x+2)^2 = y + 4$, de donde :

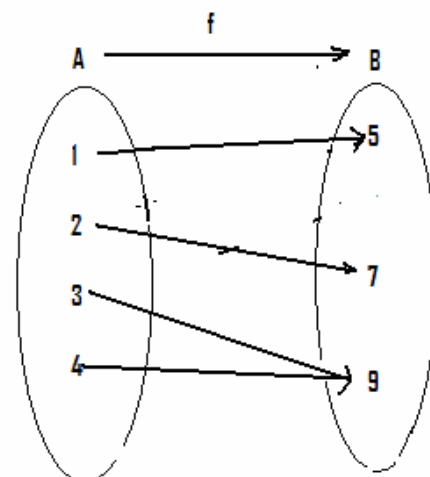
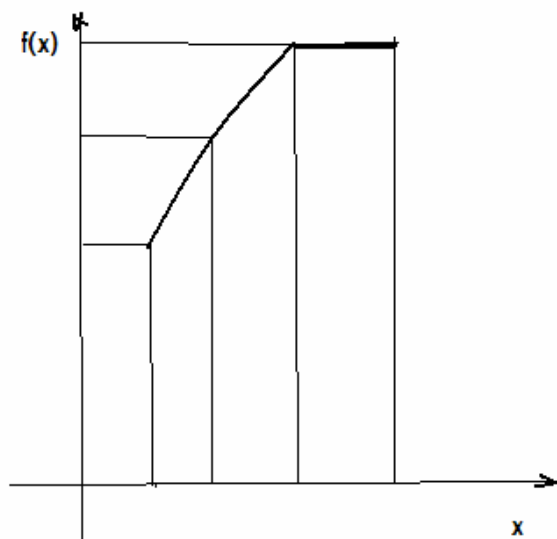
$x+2 = \sqrt{y+4}$ que equivale a : $x = \sqrt{y+4} - 2$, por lo tanto la inversa se expresa por :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 2$$

para $f^{-1}(5) = \sqrt{5+4} - 2 = 1$ y tambien : $f^{-1}(12) = \sqrt{12+4} - 2 = 2$

FUNCION SOBREYECTIVA O EPIYECTIVA: $\forall y \in B; \exists x \in A / f(x) = y$

(La función actúa sobre todo el codominio)



FUNCION BIYECTIVA: CUANDO LA FUNCION ES INYECTIVA Y SOBREYECTIVA A LA VEZ. (UNO A UNO Y SOBRE).

GUIA DE EJERCICIOS:

- 1.-Pruebe que toda función lineal es biyectiva.
- 2.-pruebe que la función de 2º grado no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
- 3.-determinar Dom y Rec de cada una de las funciones reales.

$$3.1.-f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x} \quad]-\infty, 1], x \neq 0; \mathfrak{R} - \{0\}$$

$$3.2.-f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \quad \mathfrak{R} - \{1\}; [-4, 4]$$

$$3.3.-f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - (2x+3)^2} \quad \begin{matrix} -4- \\ \left[-2, \frac{-4}{3}\right]; \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \end{matrix}$$

$$3.4.-\sqrt{\sqrt{x+1}+2} \quad [-1, \infty[; [\sqrt{2}, \infty[$$

$$3.5.-f(x) = \sqrt{|x+1|-1} \quad]-\infty, -2] \cup [0, \infty[; \mathfrak{R}_0^+$$

4.- Determinar $A \subseteq \mathfrak{R}$, tal que la relación dada sea una función.

$$4.1.-f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow [1, 3[; \mathfrak{R} \sqrt{x-1} \quad]8, 0[$$

$$4.2.- f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow [\infty, 1]; f(x) = \frac{1}{x-2} \quad [1, 0[$$

$$4.3.- f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow [1, 9[; f(x) = 2\sqrt{x-7} \quad]16, 64[$$

$$4.4.- f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow [1, 7[; f(x) = \sqrt{x-2} \quad]\frac{29}{4}, \frac{109}{4}]$$

$$4.5.- f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow [10, \infty [; f(x) = x^2 + 2 \quad [0, 4]$$

$$4.6.- f: A \subseteq \mathfrak{R}, \rightarrow \mathfrak{R}^+; f(x) = \frac{(x-5)(x+3)}{(x^2+x+1)(x^2-4)} \quad]-\infty, -3 [\cup [-2, 2[\cup [5, \infty[$$

5.-Determinar el recorrido de las siguientes funciones. (Determine además su inversa si existe)

$$3.2.-f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \quad \mathfrak{R} - \{1\}; [-4, 4]$$

$$3.3.-f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - (2x+3)^2} \quad \begin{matrix} -4- \\ \left[-2, \frac{-4}{3}\right]; \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\ [0, 1/3[\end{matrix}$$

$$5.3.- \left] \frac{29}{4}, \infty \right[\rightarrow \mathfrak{R} f(x) = 2\sqrt{x-7} \quad]-1, \infty [$$

$$5.4.-]0,1[\rightarrow \mathfrak{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad]-1, \infty[$$

$$5.5.-]-\infty, -3[\rightarrow \mathfrak{R} \quad f(x) = \sqrt{|x| - 3} \quad]0, \infty[$$

6.- se definen la funciones $f: A \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow B \subseteq \mathfrak{R}$.

Determinar A y B que redefinan las funciones .

Determine además la inversa para cada una de ellas.

$$6.1.- x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \quad f: \mathfrak{R} - [-1, 1] \rightarrow \mathfrak{R} - [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$f^{-1}: x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1}$$

$$6.2.- x \rightarrow x^2 + 2x + 1 \quad f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^+$$

$$f^{-1}: x \rightarrow \sqrt{x} - 1$$

$$6.3.- x \rightarrow \frac{x+3}{x-1} \quad f: \mathfrak{R} - \{1\} \rightarrow \mathfrak{R} - \{1\}$$

$$f^{-1}: x \rightarrow \frac{x+3}{x-1}$$

$$6.4.- x \rightarrow \sqrt{9 - x^2} \quad f: [-3, 3] \rightarrow [0, 3]$$

$$f^{-1}: x \rightarrow \sqrt{9 - x^2}$$

$$6.5.- x \rightarrow x^3 + 1 \quad f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$f^{-1}: x \rightarrow \sqrt[3]{x-1}$$

Montoya.-